

УДК 301.17.15; 301.07.13

П.В. Лук'янов

МОДЕЛЬ КВАЗИТОЧКОВОГО ВИХОРУ

In this paper, we obtain the nonviscous model of compact vortex close to the classical point vortex. The obtained vortex differs from the classical point vortex flow; its azimuthal velocity field is not potential. In addition to the classical flow solution, there is a term that makes the vortex compensated. The overall vorticity in it equals zero. Unlike the classical point vortex, the obtained one is compact and its velocity field meets the non-slip condition at the outer boundary like the (Taylor-Couette) flow between two coaxial cylinders. Furthermore, we introduce the non-dimensional parameter, the function of radial coordinate indicating locally how the quasi-point vortex differs from the point vortex. The proposed model is an alternative to the point vortex one. The quasi-point vortex can be used in all relevant problems, where its counterpart (the point vortex) was used before. Crucially, its flow domain will always have finite scales just like it's in the nature.

Вступ

У природі існує багато прикладів вихрових течій, які добре апроксимуються безвихровим, а отже, потенціальним, законом обертання. Мова йде про так звані точкові вихори. До них можна віднести всі задачі, де рух рідини близький до вихрової нитки, що є вихровою трубкою близького до нуля радіуса, яку оточує рідина з нульовою завихреністю. Відомі два розв'язки, що описують точковий вихровий рух. Вони пов'язані з описом власне точкового вихору, а також з його автомодельним розв'язком, що описує дифузію точкового вихору та вихрової нитки. Модель точкового вихору дуже широко використовується у важливих для аерогідродинаміки явищах обтікання тіл (крила, циліндра) рідиною для опису так званої вихрової “доріжки Кармана”, а також в інших задачах [1, 2]. Як зазначено у [2], вихрова “доріжка Кармана” не може описуватись ланцюжком з точкових вихорів, оскільки їх непарна кількість завжди має нескінченну кінетичну енергію, що нефізично. Крім того, згідно з моделлю точкового вихору, весь простір, до нескінченності, має циркуляційний рух. Однак реальні течії мають скінченні розміри, що не описує модель точкового вихору. Тому насправді вказаний рух може бути лише близьким до потенціального – квазі (майже) потенціальним.

Нещодавно було отримано розв'язок вихрової течії, що складається з двох областей сталої завихреності різних знаків [1]. Це – так званий компактний компенсований вихор. Але, як це показано у даній праці, простий граничний перехід від вихору з двома областями завихреності до вихору з внутрішньою областю завихреності нульового радіуса математично неможливий. Утім використання моделі компакт-

ного компенсованого вихору в задачах, де розмір внутрішньої області завихреності не визначений і близький до нуля, ускладнено. Тому для отримання аналога точкового вихору в рамках моделі компенсованого вихору був застосований спеціальний підхід.

Постановка задачі

Об'єктом дослідження є нестислива нев'язка рідина. Предмет дослідження – математична модель, що відповідає вихровій течії. Задача полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок, який би був максимально схожий на точковий вихор, але мав би скінченні розміри, як це є у природі [4].

Виведення основних співвідношень

Нині відомо два найпростіших розв'язки вихорів. Перший – точковий вихор з розподілом азимутальної швидкості у вигляді потенціальної течії:

$$V_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (1)$$

де Γ – циркуляція, r – радіальна координата.

Згідно з (1), значення завихреності дорівнює нулю скрізь, крім точки $r = 0$, і тому така течія називається точковим вихором. Відомий також другий розв'язок, який стосується задачі про дифузію вихрової нитки. Поля азимутальної швидкості та завихреності (вертикальної її складової) мають вигляд [3, 4]

$$V_{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left[-\frac{r^2}{4\nu t} \right] \right), \quad \omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp \left[-\frac{r^2}{4\nu t} \right], \quad (2)$$

де ν – кінематична в'язкість рідини.

Відомо про розв'язок [1], який описує так званий компактний компенсований вихор. Поля азимутальної швидкості V_ϕ та вертикальної складової завихреності ω_z у такій течії мають вигляд

$$V_\phi = \begin{cases} \frac{V_0 r}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{V_0 a}{r} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2} \right), & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (3)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \frac{2V_0}{a}, & 0 \leq r \leq a, \\ -\frac{2V_0 a}{R^2 - a^2}, & a \leq r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (4)$$

де a, R — відповідно радіус внутрішньої області вихору і радіус вихору, V_0 — масштаб азимутальної швидкості.

Однак простим граничним переходом до значення радіуса внутрішньої області ($r = a$) рівного нулю неможливо отримати шуканий розв'язок. Дійсно, покладаючи в (3), (4) $a = 0$, отримаємо азимутальну швидкість рівну нулю скрізь, крім $r = 0$. Вертикальна складова завихреності при цьому схожа на ту, що описується моделлю точкового вихору: на вісі обертання маємо нескінченність, а в усьому об'ємі рідини течія є потенціальною. Отже, необхідно знайти нову модель компенсованого вихору, яка б була схожа на точковий вихор.

Зазначимо, що точковий вихор отримується як граничний перехід від вихрової трубки, коли площа перерізу S прямує до нуля:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \int \omega_0 ds = \text{const} = \Gamma. \quad (5)$$

Нехай переріз має форму круга радіусом $\varepsilon \ll 1$. Тоді $S = \pi \varepsilon^2$ і отримаємо

$$\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_0 \pi \varepsilon^2.$$

У праці [1] було показано, що необхідною умовою скінченності розміру області обертання рідини є компенсованість поля завихреності:

$$\int_V \omega_z dV = 0, \quad (6)$$

де V — об'єм. Припустимо, що шуканий вихор складається з двох областей сталої завихреності:

$$\omega_z = \begin{cases} \omega_0, & 0 \leq r \leq \varepsilon; \\ \omega_1, & \varepsilon < r \leq R; \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

У виразах (7) ε — мала порівняно з R величина. Тоді умова (4) трансформується в

$$\int_0^\varepsilon \omega_0 r dr + \int_\varepsilon^R \omega_1 r dr = 0$$

або

$$\frac{\omega_0 \varepsilon^2}{2} + \frac{\omega_1}{2} (R^2 - \varepsilon^2) = 0.$$

Звідси маємо

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0 \varepsilon^2}{R^2 - \varepsilon^2}. \quad (8)$$

Для точкового вихору $\varepsilon = 0$, тому шукане значення ω_1 отримується як граничний перехід:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_1(\varepsilon) = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\omega_0 \varepsilon^2)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (R^2 - \varepsilon^2)} = -\frac{\Gamma}{\pi R^2}, \quad (9)$$

де ω_0 — значення завихреності на вісі обертання. Із (9) випливає, що реальний точковий вихор, який досі прийнято описувати наближенням (1), має зовнішню область ($0 < r \leq R$), строго кажучи, непотенціальної течії: $\omega_1 \neq 0$. Оскільки $R \gg \varepsilon$, то $|\omega_1/\omega_0| = \varepsilon^2/R^2$ — мала величина. Отже, ω_1 в експериментальних дослідженнях сприймається як похибка і вважається, що рух є потенціальним.

Визначимо поле азимутальної швидкості в отриманому вихорі. Для цього (7) перепишемо в явному вигляді:

$$\omega_z = \begin{cases} \omega_0 = \frac{\Gamma}{\pi \varepsilon^2}, & 0 \leq r \leq \varepsilon; \\ \omega_1 = -\frac{\Gamma}{\pi R^2}, & \varepsilon < r \leq R; \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (10)$$

За відомою формулою [1], що пов'язує азимутальну швидкість із вертикальною складовою завихреності, отримуємо

$$V_\phi(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left(\int_0^\varepsilon \omega_0 r dr + \int_\varepsilon^r \omega_1 r dr \right) = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right). \quad (11)$$

Розв'язок (11) задовольняє граничну умову $V_\phi(r = R) = 0$:

$$V_{\varphi}(R) = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{R^2} \right) = 0. \quad (12)$$

Крім того, $V_{\varphi} = 0$ при $r > R$. Ця умова означає компактність, а отже, скінченність розміру, вихору: поза границею вихору ($r = R$) обертання відсутнє. На вісі обертання азимутальна швидкість рівна нескінченності, як у точковому вихорі. Тому розв'язок (10), (11) логічно було б назвати квазіточковим вихором. Слід зазначити, що розподіл завихреності поблизу вісі обертання вихору (співвідношення (8)) досліджувався у праці [5]. Але автори замість вихрової течії $\omega_1 \neq 0$ розглядали поза околосі обертання потенціальну течію, як у вихорі Ренкіна. Нагадаємо [1, 6], що і точковий вихор, і вихор Ренкіна (зі своїм аналогом у випадку врахування в'язкості – вихором Лемба–Озеена) суперечать фундаментальному закону природи – збереженню енергії, оскільки кінетична енергія у зазначених вихорах є нескінченністю, що неможливо. А у випадку скінченних областей зазначені моделі не задовольняють умову (12).

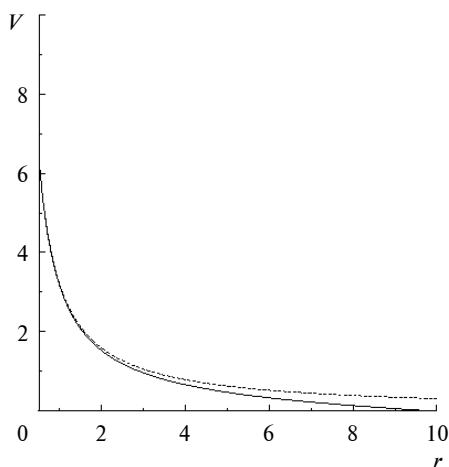


Рис. 1. Розподіл азимутальної швидкості: – точковий вихор, ——— – квазіточковий вихор

На рис. 1 показано профіль швидкості у квазіточковому вихорі. Наведені дані відповідають значенням $\Gamma = 10$ і $R = 10$. Видно (суцільна крива), що поза границею вихору ($r > R$) рідина перебуває у спокої: $V_{\varphi} = 0$. Вихор є компактным. Натомість класичний точковий вихор (пунктирна крива) не є компактным.

Міра непотенціальності квазіточкового вихору

Для кількісної характеристики течії зручно ввести певний параметр – міру її непотенціаль-

ності, або, іншими словами, відношення відхилення отриманого розв'язку (11) від точкового вихору (1) до потенціальної течії (1). Для визначеності введемо позначення:

$$V_{\varphi}^0 = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad V_{\varphi}^1 = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (13)$$

Використовуючи співвідношення (13), отримуємо таку аналітичну залежність вказаної міри від радіальної координати:

$$\delta(r) = \frac{V_{\varphi}^0 - V_{\varphi}^1}{V_{\varphi}^0} = \frac{r^2}{R^2}. \quad (14)$$

Отже, з (14) випливає, що вже на відстані близько третини радіуса вихору від осі обертання маємо відхилення від потенціального руху приблизно 10 %. Це означає, що майже для 90 % площі (об'єму) вихору непотенціальний доданок має враховуватись. Сказане ілюструє рис. 2, де зображено графік функціональної залежності (12).

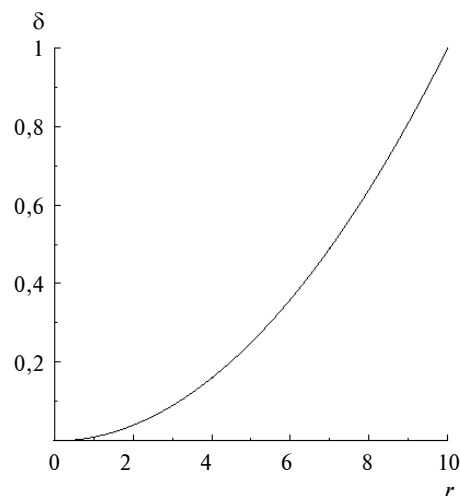


Рис. 2. Залежність відносного відхилення поля швидкості квазіточкового розв'язку від точкового

Важливим є те, що параметр δ характеризує співвідношення не тільки лінійних (азимутальних) швидкостей, але й кутових – при переносному русі, тобто при обертанні навколо вісі $r = 0$. Дійсно, з означення кутової швидкості як відношення лінійної швидкості до відстані обертання маємо

$$\omega_a^0 = \frac{\Gamma}{\pi r^2}, \quad \omega_a^1 = \frac{\Gamma}{\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right). \quad (15)$$

У виразах (15) наведено переносні кутові швидкості точкового ω_a^0 та квазіточкового ω_a^1 вихорів. Отже, залежність відносного відхилен-

ня квазіточкового вихору від точкового обчислюється як

$$\frac{\omega_a^0 - \omega_a^1}{\omega_a^0} = \frac{1/R^2}{1/r^2} = \frac{r^2}{R^2} = \delta(r). \quad (16)$$

На рис. 3 наведено графічні залежності переносних кутових швидкостей для квазіточкового і точкового вихорів. Видно, що зазначені кутові швидкості слабо відрізняються одна від одної.

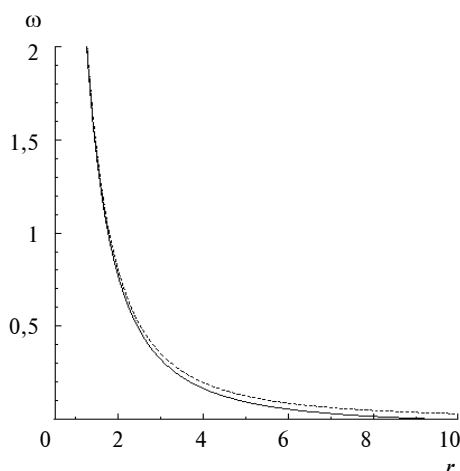


Рис. 3. Розподіл переносної кутової швидкості: — точковий вихор, ——— — квазіточковий вихор

Висновки

У статті запропоновано модель вихрової течії, яка кількісно дуже близька до точкового вихору і тому отримала назву квазіточкового вихору. Квазіточковий вихор має такий самий недолік, що і точковий вихор (нескінченне зна-

чення азимутальної швидкості на вісі обертання), однак при цьому він позбавлений двох інших більш суттєвих недоліків. По-перше, такий вихор має скінченний розмір, і отже, його кінетична енергія є скінченною, що узгоджується із законом збереження енергії. По-друге, квазіточковий вихор задовольняє, у випадку течії із зовнішньою границею, умову прилипання подібно до течії Тейлора–Куетта – обертання рідини між двома співвісними циліндрами.

У роботі введено кількісну міру відхилення розв'язку, що описує квазіточковий вихор, від відповідного класичного розв'язку – точкового вихору. Як з'ясувалось, вказане відхилення описується однією і тією ж залежністю (параметром) для поля як лінійної швидкості, так і переносної кутової. Ця залежність відповідає параболічному закону, в якому незалежною змінною є відношення радіальної координати до радіуса вихору. З цього слідує, що вже на відстані близько третини радіуса вихору відхилення отриманого розв'язку від потенціальної течії (точкового вихору) є істотним – більше 10 %.

Перспективою подальших досліджень є застосування запропонованої моделі у задачах фізики, де зазначені недоліки точкового вихору є принциповими. До них можна віднести циркуляційне обтікання циліндра, моделювання так званих “доріжок Кармана” – у потоці поза тілом, вихрових “джгутів”, що утворюються на крилі тощо.

Результати роботи можуть бути використані у різноманітних галузях фізики, зокрема у гідромеханіці, біоніці, фізиці атмосфери та океану.

1. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Ин-ут теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
2. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикл. гидромех. – 2011. – 13 (85), № 2. – С. 37–43.
3. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних вихорів // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2010. – № 4. – С. 145–150.
4. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклиных компенсированных вихрей // Изв. РАН, ФАО. – 1992. – 28, № 6. – С. 615–624.
5. Путья В.Й., Сидляр М.М. Гидромеханика. – К.: Вид-во Київ. ун-та, 1963. – 480 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
7. Куйбин П.А., Окулов В.Л. Одномерные решения для течений с винтовой симметрией // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – 3, № 4. – С. 311–315.
8. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наук. думка, 1993. – 268 с.